

24/5/21

Επιγώνιες Δευτέρου βαθμού

Μια επιγώνια 2^{ου} βαθμού περιγράφεται από μια εξίσωση μορφής:

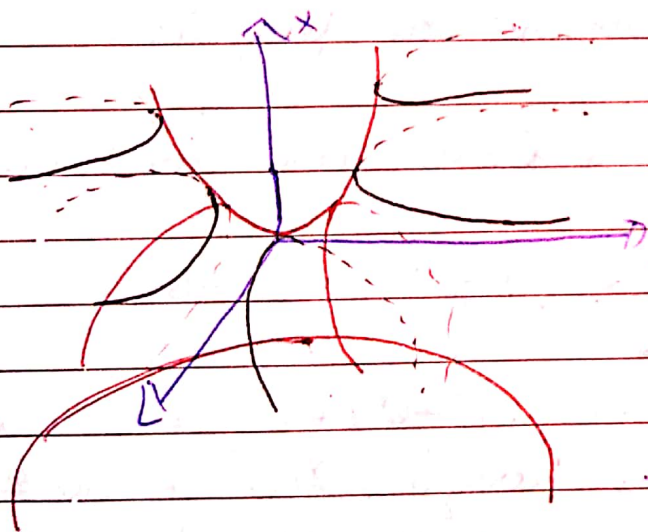
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + lz = m$$

(x, y, z)

Εδώ τα $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m \in \mathbb{R}$: κάποιοι μπορεί να είναι και 0

Π.χ Να σχεδιαστεί η επιγώνια $3z^2 - y^2 = 4x$
τετραγωνικό μέγεθος $\rightarrow$ γραμμικό

Συνήθως τοποθετώ το γραμμικό μέρος προς τα πάνω κάτω να γράψω τομές.



- $x=0$: (Έχω το επίπεδο yz)
 $\Rightarrow 3z^2 - y^2 = 0$ (Διαφορά
 $\Rightarrow (3z-y)(3z+y) = 0$ τετραγώνων)
Έχουμε 2 ευθείες

- $z=0$: (Έχουμε το επίπεδο xy)
 $\Rightarrow 4x = -y^2$ παραβολή που
περνάει από το 0

- $y=0$ (Έχουμε το επίπεδο xz) $\Rightarrow 3z^2 = 4x$: παραβολή

• $x=1$ (Είμαι στο επίπεδο y, z αλλά το έχω "ακυρώσει" στο ύψος 1) $\Rightarrow 3z^2 - y^2 = 4$ υπερβολή

• $x=2$ (y, z επίπεδο στο $x=2$) $\Rightarrow 3z^2 - y^2 = 8$

• $z=1 : 3 - y^2 = 4x \Rightarrow 4x = 3 - y^2$ παραβολή (μετατοπισμένη)

Αυτή η παρούσα ονομάζεται "σάρμα" - σάρμα (0,0,0) είναι σαρματικό επίπεδο

Για να μελετήσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x, y, z ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για τις καμπύλες.

1) Μελετάμε το τετραγωνικό μέγεθος:

$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ με τη βοήθεια του συμμετρικού πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

Τον διαγωνοποιούμε: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές και $P =$ ορθογώνιος πίνακας από το ιδιοδιάνυσμα $A = P \Lambda P^t$

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) P \Lambda P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x', y', z') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\text{Ορίζουμε } (x', y', z') = (x, y, z) P \Rightarrow (x, y, z) = (x', y', z') P^t$$

$Q(x, y, z) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2$. Τα πρόσημα των ιδιοτιμών καθορίζουν την επιγόνεια

Η $f(x, y, z) = w$ γίνεται $\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + l'z' = w$

Αντικαθιστούμε τα x, y, z με x', y', z' και έχουμε:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + l'z' = w$$

Αντικαθιστούμε τέλεια τετράγωνο $x = x' + a'$, $y = y' + b'$,
 $z = z' + c'$ και έχουμε $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = w'$

Οπότε τι σχεδιάζουμε ανάλογα με τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και w'

Π.Χ Να σχεδιάσετε την επιφάνεια που δίνεται από την
 εξίσωση $2x^2 - 2xy - 2yz - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 1$
 Λογιστεί ότι αυτή δεν έχει γραμμικό μέρος.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

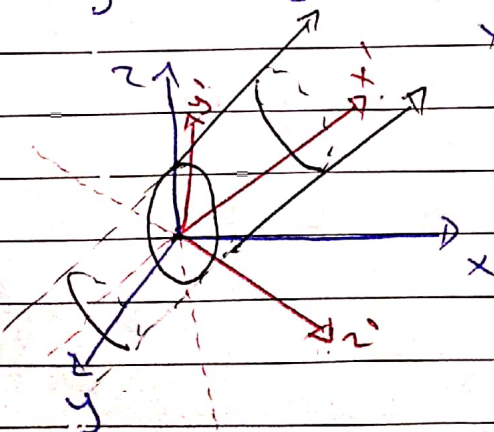
$$V(0) = \langle (1, 1, 1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle$$

$$V(3) = \langle (1, -1, 0), (1, 1, -2) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot (x', y', z') = (x, y, z)P$$

κύβλος

Η επιφάνεια δίνεται : $0 \cdot (x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2 = 1$
 $x' \in \mathbb{R} \Rightarrow$ κύβλος



$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = w', \quad w' \geq 0$$

- 1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, w' > 0 \Rightarrow$ Ελλειψοειδές
- 2) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, w' > 0 \Rightarrow$ Κονόχωνο Υπερβολοειδές
- 3) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, w' < 0 \Rightarrow$ Δίχωνο $\quad \quad \quad \text{--} \quad \quad \quad \text{--}$
- 4) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, w' = 0 \Rightarrow$ Ελλειπτικός κώνος
- 5) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Ελλειπτικό παραβολοειδές
- 6) $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ Υπερβολικό παραβολοειδές
- 7) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, w' > 0$ Ελλειπτικός κώνος
- 8) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0, w' > 0$ Υπερβολικός $\quad \quad \quad \text{--}$
- 9) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, w' > 0$ Δύο επίπεδα
- 10) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, w' = 0$ Μία ευθεία
- 11) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0, w' = 0$ Δύο τεμνόμενα επίπεδα